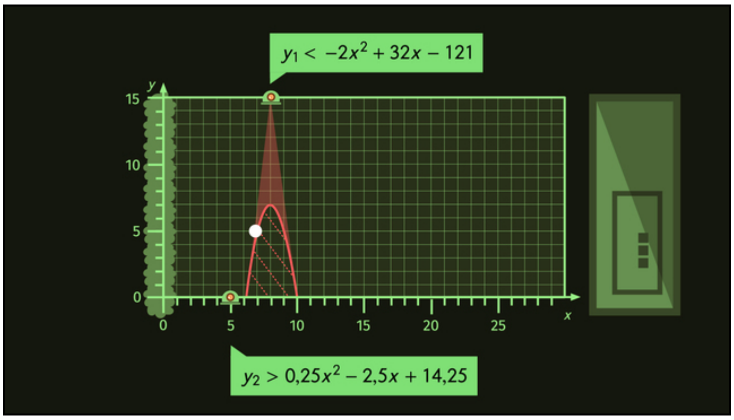
Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofatutor.com

Quadratische Ungleichungen rechnerisch lösen

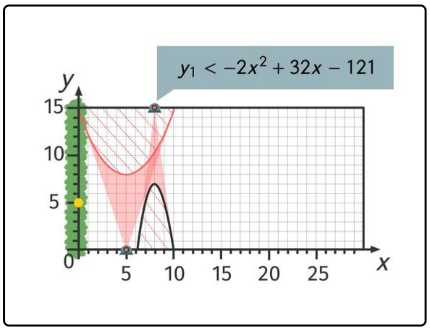


1. **Bestimme die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung.**
2. Ergänze die Rechenschritte bei der Bestimmung der Lösungsmenge.
3. Ordne den Erklärungen die passende mathematische Ausführung zu.
4. Ermittle die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung.
5. Vervollständige die Rechenschritte.

\+ mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung.

Bringe die Sätze und Formeln in die richtige Reihenfolge.



Dr. Evil möchte an das geheime Geheimlabor gelangen und muss mit seinem Roboter über ein überwachtes Feld. Es werden mithilfe zweier Projektoren parabelförmige Bereiche auf das Feld projiziert. Läuft der Roboter durch einen dieser Bereiche, geht die Alarmanlage an. Dr. Evil konnte vorher noch folgende Ungleichung hacken:

- $y_1 < -2x^2 + 32x - 121$

Kannst du Dr. Evil helfen einen sicheren Weg durch das Feld zu finden?

A

Die Quadratische Gleichung wird jetzt in die Normalform umgewandelt, sodass die pq-Formel angewendet werden kann:
$0 = x^2 - 16x + 63$

B

Zuerst wird der Startpunkt $y_1 = 5$ in die gegebene Ungleichung eingesetzt. Dann folgt:
$5 < -2x^2 + 32x - 121$

C

Auf diese quadratische Gleichung in Normalform wird nun die pq-Formel angewendet, um die beiden möglichen Lösungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x_{1|2} &= -\tfrac{-16}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(-16)^2}{4} - 63} \\ x_{1|2} &= 8 \pm \sqrt{1} \\ x_{1|2} &= 8 \pm 1 \\ \\ x_1 &= 9 \\ x_2 &= 7 \end{aligned}$$

D

Die Lösungsmenge der quadratischen Ungleichung lautet somit:
$\mathsf{L} = \{x \in \mathsf{R} \mid 7 < x < 9\}$

E

Nun wird eine mögliche Lösung aus einer der beiden Mengen in die Ungleichung eingesetzt und überprüft, hier $x_1 = 8$

$$\begin{aligned} 0 &< -2x^2 + 32x - 126 \\ 0 &< -2 \cdot 8^2 + 32 \cdot 8 - 126 \\ 0 &< 2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ wahre Aussage

F

Die möglichen Lösungsmengen sind somit:
$\mathsf{M}_1 = \{x \in \mathsf{R} \mid 7 < x < 9\}$
$\mathsf{M}_2 = \{x \in \mathsf{R} \mid x > 9 \vee x < 7\}$

G

Nun bestimmt man die Lösungen der Ungleichung, indem man die quadratische Ungleichung als eine quadratische Gleichung betrachtet:
$0 = -2x^2 + 32x - 126$

H

Die quadratische Ungleichung wird dann so umgestellt, dass eine quadratische Ungleichung in allgemeiner Form vorliegt:
$0 < -2x^2 + 32x - 126$

RICHTIGE REIHENFOLGE

Unsere Tipps für die Aufgaben

1 von 5

Bestimme die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung.

1. Tipp

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung lautet wie folgt:

- $0 = ax^2 + bx + c$

Bei einer Ungleichung steht an Stelle des Gleichheitszeichens ein $>$, $\geq$, $<$ oder $\leq$.

---

2. Tipp

Bei der Normalform einer quadratischen Gleichung ist der Parameter a gleich 1. Ist der Koeffizient a einer Gleichung ungleich 1, so wird die gesamte Gleichung durch diesen Koeffizienten geteilt, damit vor dem x^2 eine 1 bzw. nichts steht:

- $0 = x^2 + px + q$

Die Größen p und q kannst du dann in die pq-Gleichung einsetzen.

---

3. Tipp

Bei der Aufstellung der Lösungsmengen auf die Relationszeichen achten ($<$; $>$; $\geq$; $\leq$).

Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1 von 5

Bestimme die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung.

Lösungsschlüssel: B, H, G, A, C, F, E, D

Um die quadratische Ungleichung $y_1 < -2x^2 + 32x - 121$ lösen zu können, bedarf es einiger Zwischenschritte. Als Erstes überlegen wir uns eine Zahl, die wir überprüfen wollen. Hier wurde $y_1 = 5$ gewählt. Dieser Wert wird in die Ungleichung eingesetzt. Wir erhalten:

$$5 < -2x^2 + 32x - 121$$

Als nächstes muss die quadratische Ungleichung in die allgemeine Form $0 < ax^2 + bx + c$ umgestellt werden. Das wird durch Umformungen auf beiden Seiten erreicht. Hier subtrahieren wir auf beiden Seiten 5:

$$\begin{array}{lll} 5 & < & -2x^2 + 32x - 121 \quad \vert -5 \\ 0 & < & -2x^2 + 32x - 126 \end{array}$$

Um die Lösungen der umgeformten quadratischen Ungleichung bestimmen zu können, wandelt man diese in eine quadratische Gleichung um, indem man das Relationszeichen austauscht. Aus $<$ wird nun $=$:

$$0 = -2x^2 + 32x - 126$$

Um die pq-Formel anwenden zu können, wird die quadratische Gleichung aus der allgemeinen in die Normalform $0 = x^2 + px + q$ umgewandelt. Man dividiert hierzu beide Seiten der Gleichung durch den Faktor a (hier -2) vor dem x^2 und erhält die Normalform.

$$\begin{array}{lll} 0 & = & -2x^2 + 32x - 126 \quad \vert :(-2) \\ 0 & = & x^2 - 16x + 63 \end{array}$$

Nun können wir die pq-Formel anwenden und die beiden möglichen Lösungen bestimmen. Die pq-Formel lautet:

$$x_{1\vert 2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Das p steht dabei in der Normalform vor dem linearen Glied x und das q entspricht dem absoluten Glied:

$$0 = x^2 + px + q = x^2 - 16x + 63$$

Für diese Gleichung folgt mit $p = 16$ und $q = 63$ folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
x_{1|2} &= -\tfrac{-16}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(-16)^2}{4} - 63} \\
x_{1|2} &= 8 \pm \sqrt{\tfrac{256}{4} - 63} \\
x_{1|2} &= 8 \pm \sqrt{64 - 63} \\
x_{1|2} &= 8 \pm \sqrt{1} \\
x_{1|2} &= 8 \pm 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 9 \\
x_2 &= 7
\end{aligned}$$

Nun haben wir 2 Zahlen erhalten, die mögliche Lösungsmengen eingrenzen. Dabei ist darauf zu achten, dass unsere Relationszeichen kein "kleiner gleich" enthalten, also müssen wir das auch bei der Angabe der Mengen berücksichtigen. Es ergeben sich folgende mögliche Lösungsmengen:

$\mathsf{M}_1 = \{x \in \mathsf{R} \mid 7 < x < 9\}$

$\mathsf{M}_2 = \{x \in \mathsf{R} \mid x > 9 \vee x < 7\}$

M_1 enthält dabei alle reellen Zahlen zwischen 7 und 9, die größer als 7 und kleiner als 9 sind. M_2 enthält die Zahlen, die größer als 9 oder kleiner als 7 sind.

Um nun herausfinden zu können, welche Menge die richtige ist, setzen wir eine mögliche Lösung aus einer Menge ein. In diesem Fall wird $x_1 = 8$ aus der Menge M_1 eingesetzt. Erhalten wir eine wahre Aussage, so wissen wir, dass M_1 die gesuchte Lösungsmenge ist.

$$\begin{aligned}
0 &< -2x^2 + 32x - 126 \\
0 &< -2 \cdot 8^2 + 32 \cdot 8 - 126 \\
0 &< -2 \cdot 64 + 256 - 126 \\
0 &< -128 + 256 - 126 \\
0 &< 2
\end{aligned}$$

Die Aussage $0 < 2$ ist eine wahre Aussage und zeigt uns, dass M_1 die Lösungsmenge der Ungleichung ist. Die gesuchte Lösungsmenge lautet also:

$\mathsf{L} = \{x \in \mathsf{R} \mid 7 < x < 9\}$