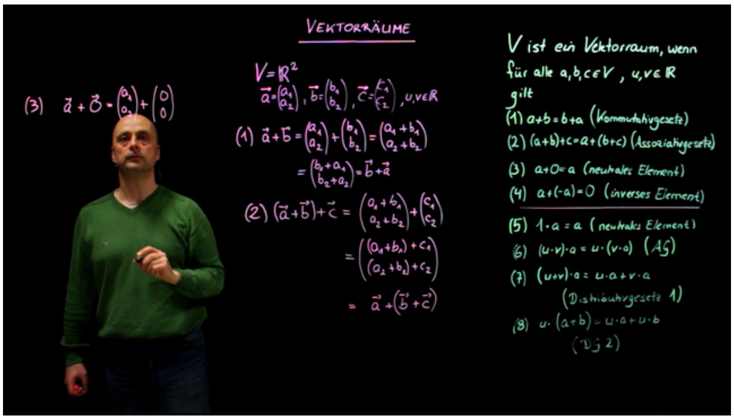
Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofatutor.com

Vektorräume – Beispiele



1. **Beschreibe, wie das Kommutativgesetz sowie Assoziativgesetz der Addition im $\mathbf{R}^2$ nachgewiesen werden können.**
2. Vervollständige den Nachweis des neutralen Elementes sowie des Assoziativgesetzes der Multiplikation im R^2.
3. Weise eines der beiden Distributivgesetze für R^2 nach.
4. Prüfe die folgenden Aussagen.
5. Entscheide, ob das Distributivgesetz auch im R^3 gilt.

\+ mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben

Das komplette Paket, **inkl. aller Aufgaben, Tipps, Lösungen und Lösungswege** gibt es für alle Abonnenten von sofatutor.com

Beschreibe, wie das Kommutativgesetz sowie Assoziativgesetz der Addition im $\mathbf{R}^2$ nachgewiesen werden können.

Setze die fehlenden Begriffe oder Terme ein.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Für zwei Vektoren im R^2 ist die Addition so definiert wie hier zu sehen ist.

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im R^2.

Koordinate | $a_2 + (b_2 + c_2)$ | $a_1 + (b_1 + c_1)$ | $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ | Koordinate | addiert | $b_1 + a_1$ | $\vec{b} + \vec{a}$ | Reihenfolge | $b_2 + a_2$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) der Addition besagt, dass die ____________________ (1) bei der Addition vertauscht werden darf:

Der Nachweis wird für jede ____________________ (2) des Vektors geführt.

- Für die erste Koordinate des Vektors $\vec{a} + \vec{b}$ gilt $a_1 + b_1 =$ ____________________ (3) und
- für die zweite Koordinate $a_2 + b_2 =$ ____________________ (4).

Das bedeutet, dass $\vec{a} + \vec{b} =$ ____________________ (5) ist.

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Das Assoziativgesetz der Addition besagt, dass sowohl von links nach rechts als auch von rechts nach links ______________ 6 werden darf:

Der Nachweis wird für jede ______________ 7 des Vektors geführt.

- Für die erste Koordinate des Vektors $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ gilt $(a_1+b_1)+c_1=$ ______________ 8 und
- für die zweite Koordinate $(a_2+b_2)+c_2=$ ______________ 9.

Das bedeutet, dass $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=$ ______________ 10 ist.

Unsere Tipps für die Aufgaben

1
von 5

Beschreibe, wie das Kommutativgesetz sowie Assoziativgesetz der Addition im $\mathbf{R}^2$ nachgewiesen werden können.

1. Tipp

Verwende das Kommutativgesetz der Addition der reellen Zahlen: $a+b=b+a$.

---

2. Tipp

Verwende das Assoziativgesetz der Addition der reellen Zahlen: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1 von 5

Beschreibe, wie das Kommutativgesetz sowie Assoziativgesetz der Addition im $\mathbf{R}^2$ nachgewiesen werden können.

Lösungsschlüssel: 1: Reihenfolge // 2: Koordinate // 3: b_1+a_1 // 4: b_2+a_2 // 5: $\vec{b}+\vec{a}$ // 6: addiert // 7: Koordinate // 8: $a_1+(b_1+c_1)$ // 9: $a_2+(b_2+c_2)$ // 10: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

Alle Vektorraumeigenschaften mit der hier erklärten Addition können Koordinate für Koordinate geführt werden.

Das Kommutativgesetz $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}.$$

Nun können in jeder Koordinate die Reihenfolge der Addition vertauscht werden:

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ b_2+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite steht die Summe der beiden Vektoren $\vec{b}+\vec{a}$.

Das Assoziativgesetz $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \end{pmatrix}.$$

Nun kann in jeder Koordinate das Assoziativgesetz der Addition der reellen Zahlen angewendet werden:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ a_2+(b_2+c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) . \\
&= \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})
\end{aligned}$$

Damit ist das Assoziativgesetz nachgewiesen.