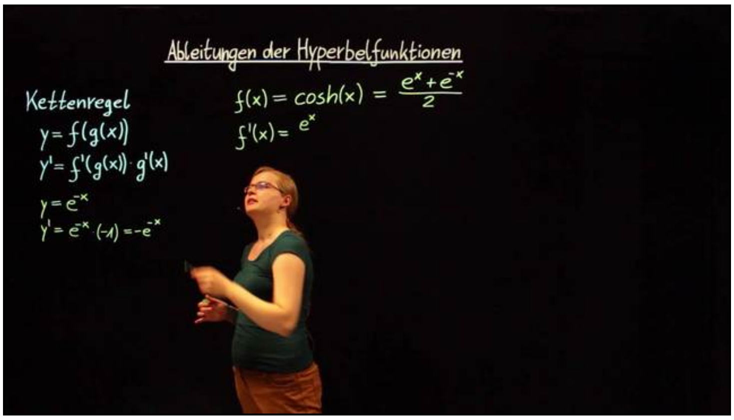
Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofatutor.com

Ableitungen der Hyperbelfunktionen sinh(x), cosh(x) und tanh(x)



1. **Beschreibe, warum** $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$**st.**
2. **Gib die Definitionen von** $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ **sowie** $\tanh(x)$ **an.**
3. **Bestimme die Ableitung der Funktion** $f(x) = \tanh(x)$.
4. **Leite die Funktion einmal ab.**
5. **Bestimme die zweite Ableitung von** $\tanh(x)$.
6. **Leite den Kotangens hyperbolicus** $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ **einmal ab.**

\+ **mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben**

Beschreibe, warum $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ ist.

Wähle die korrekten Aussagen aus.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- [ ] **A** Es ist $(\cosh(x))^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$.
- [ ] **B** Es ist $(\cosh(x))^2 = 32$.
- [ ] **C** Es ist $(\sinh(x))^2 = \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$.
- [ ] **D** Es ist $(\sinh(x))^2 = 16$.
- [ ] **E** Es gilt $e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x} = 4$.

Unsere Tipps für die Aufgaben

1 von 6

Beschreibe, warum $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ ist.

1. Tipp

Verwende die binomischen Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

---

2. Tipp

$a = e^x$ und $b = e^{-x}$.

---

3. Tipp

Es ist $(e^x)^2 = e^2x$ und $(e^{-x})^2 = e^{-2x}$.

---

4. Tipp

Beachte, dass $e^x\ e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ ist.

Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1 von 6

Beschreibe, warum $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$ ist.

Lösungsschlüssel: A, C, E

Mit Hilfe dieser Definitionen und den binomischen Formeln:

$$\sinh(x) \quad = \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) \quad = \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

kann die jeweilige hyperbolische Funktion quadriert werden:

$$\begin{aligned}(\cosh(x))^2 &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2\ e^x\ e^{-x} + e^{-2x})\end{aligned}$$

Es ist $e^x\ e^{-x} = e^0 = 1$. Damit ist

$$(\cosh(x))^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$

Ebenso kann das folgende Quadrat berechnet werden

$$\begin{aligned}(\sinh(x))^2 &= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} - 2\ e^x\ e^{-x} + e^{-2x})\end{aligned}$$

Auch hier ist $e^x\ e^{-x} = e^0 = 1$ und somit

$$(\sinh(x))^2 = \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}.$$

Zuletzt werden die beiden Quadrate addiert:

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right)$$

Das Minuszeichen vor der Klammer kehrt in der Klammer die Vorzeichen um:

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}\ 4 = 1$$

Das war's!