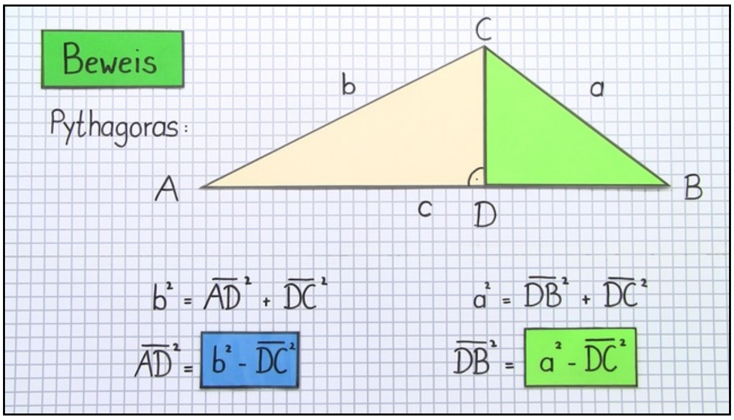
Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofatutor.com

Additionssätze cos(a+b) und cos(a-b) – Herleitung und Beweis



1. **Gib den Beweis des Additionssatzes $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ wieder.**
2. **Gib die beiden Additionssätze für den Kosinus an.**
3. **Berechne $\cos(75°)$ mit Hilfe des Additionssatzes $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.**
4. **Begründe den trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ mit einem Additionssatz.**
5. **Leite eine Formel für $\cos(2 \cdot \alpha)$ her.**

\+ **mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben**

Gib den Beweis des Additionssatzes $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ wieder.

Bringe die einzelnen Schritte in die richtige Reihenfolge.

Wir wollen den Kosinussatz für $\cos(\alpha - \beta)$ mit der Formel für $\cos(\alpha + \beta)$ herleiten.

A
Unter Verwendung der Symmetrien
- des Sinus: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ sowie
- des Kosinus: $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

erhält man

B
Es gilt der Additionssatz $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

C
Somit ist der Additionssatz bewiesen: $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$.

D
Damit ist $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(-\beta)$.

E
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot (-\sin(\beta))$.

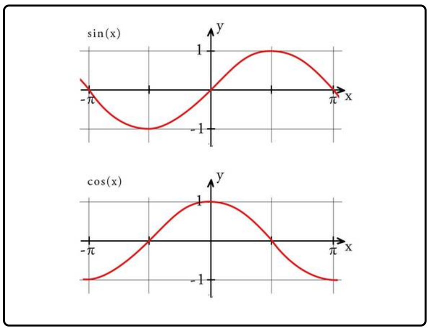
RICHTIGE REIHENFOLGE ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Unsere Tipps für die Aufgaben

1 von 5

Gib den Beweis des Additionssatzes $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ wieder.

1. Tipp



Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

2. Tipp

Ersetze in der bekannten Formel für $\cos(\alpha + \beta)$ den Winkel β durch $-\beta$.

Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1
von 5

Gib den Beweis des Additionssatzes $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ wieder.

Lösungsschlüssel: B, D, A, E, C

Zum Nachweis des Additionssatzes $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ wird der Additionssatz $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ verwendet.

Zusätzlich benötigt man Symmetrieeigenschaften

- des Sinus: $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$, d.h. die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
- des Kosinus: $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$, d.h. die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta)\\&=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot(-\sin(\beta))\\&=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$