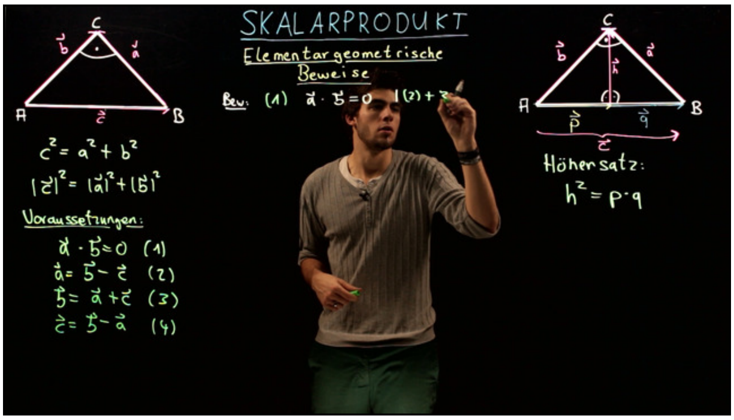
Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofatutor.com

Skalarprodukt - Elementargeometrische Beweise

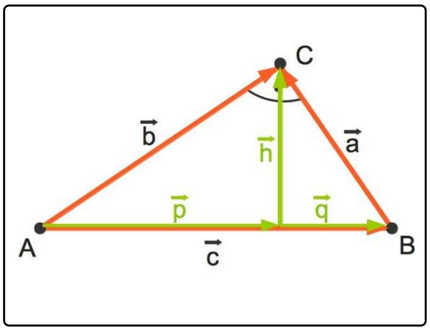


1. **Gib den Beweis des Höhensatzes wieder.**
2. Gib den Höhensatz und den Satz des Pythagoras wieder.
3. Benenne die Voraussetzungen für den Beweis des Höhensatzes.
4. Gib die Aussagen des Kathetensatzes und des Satzes von Thales wieder.
5. Beweise den Kathetensatz.
6. Beweise den Satz des Thales.

\+ mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben

Gib den Beweis des Höhensatzes wieder.

Bringe die einzelnen Schritte des Beweises in die richtige Reihenfolge.



A

Es gilt

- $\vec{h}^2 = |\vec{h}|^2$ und
- $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$, da die beiden Vektoren kollinear sind.

B

Da sowohl $\vec{h} \cdot \vec{p} = 0$ als auch $\vec{q} \cdot \vec{h} = 0$, kann dies vereinfacht werden zu
$\vec{h}^2 = \vec{p} \cdot \vec{q}$.

C

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, da $\vec{a} \perp \vec{b}$.

D

Ausmultiplizieren führt zu der Gleichung
$\vec{h}^2 + \vec{h} \cdot \vec{p} - \vec{q} \cdot \vec{h} - \vec{q} \cdot \vec{p} = 0$.

E

Also ist $|\vec{h}|^2 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$.

F

Mit $\vec{a} = \vec{h} - \vec{q}$ und $\vec{b} = \vec{p} + \vec{h}$ erhält man:
$(\vec{h} - \vec{q}) \cdot (\vec{h} + \vec{p}) = 0$.

RICHTIGE REIHENFOLGE ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Unsere Tipps für die Aufgaben

1 von 6

Gib den Beweis des Höhensatzes wieder.

1. Tipp

Der Höhensatz lautet $h^2 = p \cdot q$. In Vektorenschreibweise lautet er $|\vec{h}|^2 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$.

---

2. Tipp

Da sowohl die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{h}$ und $\vec{p}$ als auch $\vec{h}$ und $\vec{q}$ senkrecht aufeinander stehen, gilt jeweils, dass das Skalarprodukt dieser Vektoren 0 ist.

---

3. Tipp

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist wie folgt definiert: Sei α der von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel, dann ist

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\alpha) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

---

4. Tipp

Sind zwei Vektoren kollinear, so schließen sie einen Winkel $\alpha = 0^\circ$ oder $\alpha = 180^\circ$ ein. Bei beiden Winkeln gilt $\cos(\alpha) = 1$. Somit ist

$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$.

Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1 von 6

Gib den Beweis des Höhensatzes wieder.

Lösungsschlüssel: C, F, D, B, A, E

Der Beweis startet mit der Orthogonalität der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, also dem rechten Winkel in C.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Da sowohl $\vec{a} = \vec{h} - \vec{q}$ als auch $\vec{b} = \vec{p} + \vec{h}$ gilt, führt dies zu

$(\vec{h} - \vec{q}) \cdot (\vec{h} + \vec{p}) = 0.$

Diese Gleichung kann ausmultipliziert werden. Zusätzlich mit der Orthogonalität der Vektoren $\vec{h}$ und $\vec{p}$ sowie $\vec{h}$ und $\vec{q}$ führt dies zu

$$(\vec{h} - \vec{q}) \cdot (\vec{h} + \vec{p}) = \vec{h}^{\,2} + \vec{h} \cdot \vec{p} - \vec{q} \cdot \vec{h} - \vec{q} \cdot \vec{p} = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{h}^{\,2} = \vec{p} \cdot \vec{q}.$$

Der Höhensatz ist fast bewiesen. Da hier allerdings noch Skalarprodukte stehen und nicht die Längen von Vektoren, müssen noch zwei Eigenschaften verwendet werden:

- $\vec{h}^{\,2} = |\vec{h}|^2$ und
- $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$, da die beiden Vektoren kollinear sind.

Es gilt also $|\vec{h}|^2 = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$ und damit ist der Höhensatz bewiesen.