



Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofator.com

# Grenzwertsätze für Funktionen

**GRENZWERTSATZE FÜR FUNKTIONEN**

Seien  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei Funktionen.  
Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$   
mit  $A, B \in \mathbb{R}$  existieren, dann gilt

- (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A + B$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A - B$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A \cdot B$   
 $B \neq 0, g(x) \neq 0$  für alle  $x$   
in der Umgebung von  $\infty$  bzw.  $x_0$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{A}{B}$   
 $B \neq 0$

Dies gilt auch für  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0}$

- 1 Ergänze die Grenzwertsätze für Funktionen.
- 2 Berechne die Grenzwerte der angegebenen Funktionen.
- 3 Schildere die einzelnen Schritte zur Berechnung des Grenzwertes.
- 4 Untersuche die Funktionen auf Konvergenz und gib die Grenzwerte für  $x \rightarrow \infty$  an.
- 5 Ermittle den Grenzwert der angegebenen Funktion.
- 6 Untersuche in Abhängigkeit der Koeffizienten, wogegen die Funktion konvergiert.
- + mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben



Das komplette Paket, inkl. aller Aufgaben, Tipps, Lösungen und Lösungswege gibt es für alle Abonnenten von sofator.com



## Ergänze die Grenzwertsätze für Funktionen.

Setze die fehlenden Begriffe in die Lücken ein.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

Seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen mit den nebenstehenden Bedingungen.

Differenz

Produktes

 $x \rightarrow -\infty$ 

Produkt

Grenzwerte

Quotienten

 $x \rightarrow x_0$ 

Summe

Quotient

Differenz

Grenzwerte

Summe

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A + B$$

Der Grenzwert der .....<sup>1</sup> zweier Funktionen ist die  
 .....<sup>2</sup> der .....<sup>3</sup> der beiden Funktionen.

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A - B$$

Der Grenzwert der .....<sup>4</sup> zweier Funktionen ist die  
 .....<sup>5</sup> der Grenzwerte der beiden Funktionen.

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A \cdot B$$

Der Grenzwert des .....<sup>6</sup> zweier Funktionen ist das  
 .....<sup>7</sup> der .....<sup>8</sup> der beiden Funktionen.

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{A}{B}$$

Der Grenzwert des .....<sup>9</sup> zweier Funktionen ist der  
 .....<sup>10</sup> der Grenzwerte der beiden Funktionen.

Hier muss zusätzlich noch gelten, dass sowohl die Werte der Nennerfunktion ab einem gewissen Wert als auch der Grenzwert ungleich 0 sind.



5

Alle Sätze gelten auch für die Grenzwerte für .....<sup>11</sup> und  
.....<sup>12</sup>, wobei  $x_0$  eine Definitionslücke ist.



## Unsere Tipps für die Aufgaben

1  
von 6

### Ergänze die Grenzwertsätze für Funktionen.

#### 1. Tipp

Mit den Grenzwertsätzen kannst du immer zuerst die Einzelgrenzwerte betrachten und im Anschluss den Grenzwert des Gesamtausdrucks bestimmen.

---

#### 2. Tipp

Ein Beispiel: Für  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{x}$  gilt für die Einzelgrenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . Dann konvergiert die Funktion  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$  gegen  $2 + 0 = 2$ .

---



## Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1  
von 6

### Ergänze die Grenzwertsätze für Funktionen.

**Lösungsschlüssel:** 1: Summe // 2: Summe // 3: Grenzwerte // 4: Differenz // 5: Differenz // 6: Produktes // 7: Produkt // 8: Grenzwerte // 9: Quotienten // 10: Quotient // [11+12]':  $x \rightarrow -\infty$  oder  $x \rightarrow x_0$

**Jede Antwort darf nur einmal eingesetzt werden. Die Reihenfolge ist frei wählbar.**

Die Grenzwertsätze für Funktionen bieten ein Handwerkszeug zur Berechnung von Grenzwerten. Dabei müssen die miteinander über die Grundrechenarten verknüpften Funktionen konvergent sein. Das heißt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = B.$$

Die Grenzwertsätze gelten auch für die Berechnung der Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$  sowie  $\lim_{x \rightarrow x_0}$ , wobei  $x_0$  eine

Definitionslücke ist. Die Grenzwertsätze lauten:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A + B$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A - B$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A \cdot B$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{A}{B}$  Hier muss zusätzlich noch gelten, dass sowohl die Werte der

Nennerfunktion ab einer gewissen Wert als auch der Grenzwert ungleich 0 sind.

Zusammengefasst kannst du den Grenzwert einer Summe von Funktionen als die Summe der Grenzwerte, den Grenzwert einer Differenz von Funktionen als die Differenz der Grenzwerte, den Grenzwert eines Produktes von Funktionen als das Produkt der Grenzwerte und den Grenzwert eines Quotienten von Funktionen als den Quotienten der Grenzwerte unter den oben angegebenen Voraussetzungen berechnen.